Résumé 19 : calcul différentiel

E sera un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel normé de dimension n, F un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel normé et Ω un ouvert de E. Nous noterons aussi $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Dans la majorité des cas que nous aborderons, E sera $\mathbb{R}^n$, voire $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et la base $\mathscr{B}$ sera la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Nous noterons enfin, pour tout $x\in\mathbb{R}^n, x=\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, qui sera donc le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si $E=\mathbb{R}^n$.

Ce cours nécessite une extrême vigilance quant à la nature des objets dont on parle. Vous devez avant de commencer tout exercice vous interroger sur l'espace dans lequel vivent les $df, df(a), df(a).f, \partial_i f(a), dx_i, \dots$.

I Différentiabilité

§ 1. *Différentielle de f en a.–* Une fonction $f:\Omega\to F$ est dite **différentiable en** $a\in\Omega$ lorsqu'il existe une application linéaire $\ell\in\mathscr{L}(E,F)$ et une fonction $\varepsilon:E\to F$ telles que pour tout $h\in E$ de norme suffisamment petite,

$$\begin{cases} f(a+h)-f(a)=\ell(h)+\|h\|\varepsilon(h) \text{ et} \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \end{cases}$$

On montre que si cette application linéaire ℓ existe, elle est unique. On l'appelle différentielle de f en a, et on la note $\boxed{\ell=df(a)}$.

On écrit alors $f(a+h)=f(a)+df(a).h+o(\|h\|)$, et qui signifie que f admet un développement limité d'ordre 1 en a.

Exemples :

1./ La différentiabilité est une extension de la dérivabilité aux fonctions de plusieurs variables. En effet, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en a, on trouve $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(h)$, si bien qu'elle est alors différentiable en a et que sa différentielle est $h\in\mathbb{R}\mapsto f'(a)h$, soit l'homothétie de rapport $f'(a)$. Rien de vraiment étonnant dans la mesure où les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont précisément les homothéties.

2./ Si f est déjà linéaire de E dans F, alors elle est différentiable en tout $a\in E$, et $df_a=f$, car $f(a+h)=f(a)+f(h)+0_F$.

§ 2. *Dérivées partielles et dérivées selon un vecteur.–* Soit $a\in\Omega$ et $h\in E$. On dit que f admet en a **une dérivée selon le vecteur** h lorsque la fonction $t\in\mathbb{R}\mapsto f(a+th)\in F$ est dérivable en 0. On note alors cette dérivée $\dfrac{d}{dt}_{|t=0} f(a+th)=D_h f(a)$.

Dans le cas particulier où $h=e_i$ est un des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, on dit que f admet en a **une $i-$ème dérivée partielle en** a lorsqu'elle admet une dérivée selon e_i. On note alors celle-ci

$$\partial_i f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=D_{e_i}f(a)=\frac{d}{dt}_{|t=0} f(a+te_i).$$

Il y a heureusement un lien avec la différentiabilité, qui est le suivant :

Proposition I.1 (*De $df(a).h$ à $D_h f(a)$...*)

Si une fonction f est différentiable en a, alors pour tout $h\in E$, f admet une dérivée dans la direction de h en a, qui est égale à la valeur de la différentielle de f en a appliquée à h :

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} f(a+th)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}=df(a).h.$$

En particulier, on voit que, lorsque f est différentiable en a, la dérivée de f en a selon h dépend linéairement de h.

Lorsque $h = e_i$ est un des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, on note indifféremment

$$\boxed{\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a).e_i = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(a+te_i).}$$

De la linéarité de la différentielle en a, on déduit que

Proposition I.2 (*Et réciproquement...*)

Soit $f : \Omega \to F$ une fonction différentiable en a. Alors pour tout vecteur

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E, \qquad \text{on a } df(a).h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Pour les puristes, notons que la différentielle de f est une application de $\Omega \subset E$ dans l' espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$: $df : \Omega \to \mathscr{L}(E,F)$.

Remarques :

- Pratiquement, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ consistera à fixer toutes les variables autres que x_1, et à dériver cette expression par rapport à x_1.
- Expliquons la notation physicienne $df(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$. En appliquant cette égalité d'applications linéaires au vecteur h de E, on voit qu'il suffit de comprendre l'égalité $dx_i(h) = h_i$. Or, $x \in E \longmapsto x_i \in \mathbb{R}$ est la projection sur la $i-$ème composante.Cette application est linéaire, donc sa différentielle est égale à elle-même, ainsi, dx_i est bien l'application qui à un vecteur h de E associe sa $i$ème composante.

§ 3. ***Résumé : Calcul Pratique.—*** Voici trois méthodes différentes pour calculer la différentielle d'une fonction "simple" (par cet épithète, j'exclus toute fonction dont le calcul de la différentielle nécessite celui de fonctions subalternes dont elle serait la composée). Trois applications vous sont proposées par la suite.

- Méthode 1, à l'aide des dérivées partielles :
  On calcule les n dérivées partielles $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de f en a. Si on sait que f est différentiable en a, alors on peut utiliser l'expression ($\sharp$) : $df_a(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$. Sinon, si ces n dérivées partielles sont des fonctions continues sur Ω, cette méthode prouve de plus que f est différentiable en tout point de Ω.
- Méthode 2, à l'aide des dérivées directionnelles :
  On suppose ici que f est différentiable en a. Soit h dans $\mathbb{R}^n$. On calcule la dérivée en $t = 0$ de la fonction de la variable réelle t suivante : $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(a+th)$. Le résultat est $df(a).h$. Voir le calcul de la différentielle du déterminant.
- Méthode 3, à l'aide du DL en a à l'ordre 1 :
  Elle prouve aussi la différentiabilité de f en a. On essaie de trouver une fonction linéaire $\ell \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $h \in E$, $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$. Alors $\ell = df(a)$.

Exemples :

1. Avec la M1, montrer que si $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$, et $f : (x,y) \in \Omega \longmapsto \arctan \dfrac{y}{x}$, alors $df = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$.
2. Avec la M2, calculer la différentielle du carré de la norme euclidienne sur un espace euclidien E $\quad g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{array} \right.$. On doit trouver $dg_a(h) = 2 < a, h >$.
3. Avec M3 et la question précédente, montrer que la différentielle de $\sqrt{g} : x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0_E$ est $h \mapsto \left\langle \dfrac{a}{\|a\|}, h \right\rangle$.
4. Avec M1 ou M2, montrer que la différentielle de $\det : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto ad - bc \in \mathbb{R}$ en I_2 est égale à la trace.

§ 4. ***Matrice Jacobienne et Jacobien.—*** Quitte à fixer une base de E et une base de F, nous considérerons ici, dans le but louable de simplifier les notations, que f est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
Si f est différentiable en $a \in \Omega$, on appelle **Jacobienne de f en a** la matrice de l'application linéaire $df_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ dans les deux bases canoniques. On la

note $\mathrm{Jac}_a(f)$. Ainsi, si $f : x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, la matrice Jacobienne de f en a s'écrit

$$\mathrm{Jac}_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

On remarque que la première colonne est la dérivée par rapport à la première variable de $f(x)$, et qu'elle est donc égale à $df_a(e_1)$.

§ 5. ***Champs de vecteurs.–*** Si $E = F = \mathbb{R}^n$, on dit que f est un champ de vecteurs. La Jacobienne de f est alors une matrice carrée, et on appelle

- **Jacobien de** f **en** a le réel $\boxed{J_a(f) = \det(\mathrm{Jac}_a(f))}$.
- **Divergence de** f **en** a le réel $\boxed{\mathrm{Div}_a(f) = \mathrm{Trace}(\mathrm{Jac}_a(f))}$.

Exemples :

Il faut savoir calculer les Jacobiennes des champs de vecteurs classiques suivants :

$$f : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \text{ et } f : (r, \theta, \varphi) \mapsto (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\varphi).$$

II Différentielle d'une composée

§ 1. ***Dérivée de f le long d'une courbe.–*** Soit $\gamma : t \in I \longmapsto \gamma(t) \in \Omega$ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$ à valeur dans l'ouvert Ω de E. La restriction de f à la trajectoire de γ est la fonction d'une variable réelle $t \in I \longmapsto f \circ \gamma(t) \in F$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors sa dérivée nous est donnée par

$$\text{Pour tout } t \in I, \qquad \boxed{(f \circ \gamma)'(t) = df\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t).}$$

§ 2. ***LE théorème.–*** Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit Ω un ouvert de E, $u : \Omega \to F$, et $f : F \to G$ une fonction définie sur un ouvert Ω' de F contenant $u(\Omega)$. Soit enfin $a \in \Omega$. Si u est différentiable en a et si f est différentiable en $u(a)$, alors $f \circ u : \Omega \to G$ est différentiable en a et

$$\boxed{\mathbf{d(f \circ u)_a = df_{u(a)} \circ du_a}}.$$

Remarques :

- Cette égalité est consistante puisque $d(f \circ u)_a \in \mathscr{L}(E, G), df_{u(a)} \in \mathscr{L}(F, G)$ et $du_a \in \mathscr{L}(E, F)$.
- Redémontrer le résultat de l'exemple 3 ci-dessus avec cette méthode, en utilisant que $\|x\| = f\big(u(x)\big)$, où $u(x) =< x, x >$ et $f(y) = \sqrt{y}$.

Matriciellement, cela se traduit sur les Jacobiennes par

$$\boxed{\mathrm{Jac}_{\mathbf{a}}(\mathbf{f \circ u}) = \mathrm{Jac}_{\mathbf{u(a)}}(\mathbf{f}) \times \mathrm{Jac}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}).}$$

Théorème II.1 (*Derivées partielles de $f \circ u$*)

Si on adopte les notations

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \overset{\mathbf{u}}{\longmapsto} u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_p(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \overset{\mathbf{f}}{\longmapsto} f(y) \in \mathbb{R}^q,$$

u et $f \circ u$ ont des dérivées partielles par rapport aux n variables $x_1, \dots, x_n$, et f a des dérivées partielles par rapport aux p variables $y_1, \dots, y_p$. Elles sont reliées par :

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathbf{i} \in [\![\mathbf{1}, \mathbf{n}]\!], \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x_i}}(\mathbf{f \circ u})(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y_k}}(\mathbf{u(a)}) \frac{\partial \mathbf{u_k}}{\partial \mathbf{x_i}}(\mathbf{a}).}$$

Exemples :

L'exemple indispensable pour tout physicien est le passage des dérivées partielles en coordonnées cartésiennes à celles en coordonnées polaires. Notons par exemple $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\mathbb{R}_- \times \{0\}\right)$ le plan privé de la demi-droite des réels négatifs ou nuls. Soit $f : (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varphi \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \Omega \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}\right.$, où $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$.
Notons $f^* = f \circ \varphi$, si bien que pour tout $(r,\theta) \in U$, $f^*(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

On obtient de même $\frac{\partial f^*}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

§ 3. ***Opérations algébriques.***— Les exemples suivants sont regroupés dans le cours sous le théorème de dérivation de $B(f,g)$ où B est bilinéaire. Je ne donne ici que les exemples courants.

- Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$, alors leur produit $f \times g$ l'est et pour tout $a \in \Omega$, $\boxed{d(f\times g)_a = f(a) \times dg_a + g(a) \times df_a}$.
- Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ et $g : \Omega \to E$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$, alors leur produit externe $f.g$ l'est et pour tout $a \in \Omega$, $\boxed{d(f.g)_a = f(a).dg_a + g(a).df_a}$.
- Si f et $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors leur produit vectoriel $f \wedge g$ l'est et pour tout $a \in \Omega$, $\boxed{d(f\wedge g)_a = f(a) \wedge dg_a + df(a) \wedge g(a)}$.
- Si f et $g : \Omega \to E$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, à valeurs dans un euclidien E, alors leur produit scalaire $< f, g >$ l'est et pour tout $a \in \Omega$, $\boxed{d(< f,g >)_a = < f(a), dg_a > + < df_a, g(a) >}$.

III Fonctions numériques

Dans tout ce chapitre, E est un espace euclidien, et bien souvent, ce sera $E = \mathbb{R}^n$. De plus, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Physiquement, ça pourrait être un potentiel.

§ 1. ***Le gradient.***— On appelle **gradient** en a de la fonction numérique f l'unique vecteur $\nabla f(a)$ de E qui vérifie $\forall h \in E$, $\boxed{df(a).h = < \nabla f(a), h >}$.

Si $E = \mathbb{R}^n$, $\nabla f(a) = {}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$.

Remarques :

1. C'est le vecteur orienté dans le sens des plus fortes variations de f en a. Il est orthogonal aux équipotentielles de f.
2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne en effet :
$$|df(a).h| \leqslant \|\nabla f(a)\| \, \|h\|,$$
où la norme est ici euclidienne. De plus, nous avons égalité si et seulement si $\nabla f(a)$ est colinéaire à h.
3. La dérivée de f le long de la courbe γ est
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \left\langle \nabla f_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \right\rangle.$$

§ 2. ***Points critiques.***— On appelle point critique de f tout point a de Ω en lequel le gradient de f est nul.
Si Ω est ouvert, et si f admet en $a \in \Omega$ un extremum local, alors a est un point critique de f. Si Ω n'est pas un ouvert, je vous laisse trouver dans votre cours ce qui prouve que a n'est plus forcément un point critique.
Rappelons aussi que l'existence d'extrema peut nous être fourni par le théorème de topologie qui affirme qu'une fonction continue sur un compact K[1] admet un minimum et un maximum global. Ces extrema ne seront des points critiques que

1. Un compact est un fermé borné ici, puisque l'on est en dimension finie.

si ce sont des points intérieurs à K, i.e s'il existe une boule centrée en a toute entière incluse dans K.

IV Un peu de géométrie différentielle

On généralise aux parties de $\mathbb{R}^n$ la notion de tangente à une courbe.

Définition IV.1

Soit X une partie de E, $x \in X$ et $h \in E$. Le vecteur h est dit tangent à X en x lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = h$.

Exemples :

1. Pour une courbe de classe $\mathscr{C}^1$, on retrouve la notion de vecteur directeur de la tangente en un point.
2. Dans le cas de la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des points tangents en X est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à X.
3. L'ensemble des vecteurs tangents à SL_n en I_n est l'ensemble des matrices de trace nulle. Pour SO_n, c'est l'ensemble des matrices anti-symétriques.

Pour une partie X qui apparait comme une hypersurface, i.e sous la forme des points solutions de l'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, nous savons qu'ils sont inclus dans un hyperplan :

Proposition IV.2 (*Interprétation géométrie du gradient (2)*)

Si Ω est un ouvert d'un espace euclidien E, que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable, et si X est un ligne de niveau de f (i.e l'image d'une courbe de classe $\mathscr{C}^1$ sur laquelle f est constante), alors en tout point $x \in X$, les vecteurs tangents sont orthogonaux à $\nabla f(x)$. On dit que la courbe de niveau est orthogonale au gradient en tout point.

Si X est le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, notre description est complète :

Proposition IV.3 (*Cas du graphe d'une fonction*)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{N}_f = \big\{\big(x, y, f(x, y)\big)/(x, y) \in \Omega\big\}$ le graphe de f, i.e la nappe d'équation $z = f(x, y)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. L'ensemble des vecteurs tangent à $\mathcal{N}_f$ en $(a, f(a))$ est le plan vectoriel $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)y = z.$$

On appelle plan affine tangent à $\mathcal{N}_f$ en $(a, f(a))$ le plan affine d'équation cartésienne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) = z - z_0,$$

où $z_0 = f(x_0, y_0)$. C'est l'unique plan parallèle à $(\mathscr{P})$ passant par $(a, f(a))$.

V Dérivées d'ordre supérieur

§ 1. ***Applications de classe $\mathscr{C}^1$.***— Il peut être plus facile pour prouver qu'une application est différentiable, de prouver qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition V.1

Une application $f : \Omega \to F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω lorsqu'elle est différentiable et que sa différentielle $df : \Omega \to \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Proposition V.2

L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si ses dérivés partielles par rapport à une base de E existent en tout point et sont des fonctions continues de Ω dans F.

Démonstration : Démonstration non exigible. ■

Propriétés V.3

1. *Toute combinaison linéaire de fonctions de $\mathscr{C}^1(\Omega, F)$ appartient à $\mathscr{C}^1(\Omega, F)$.*
2. *Si $f, g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, alors $f \times g$, $f/g \in \mathscr{C}^1(\Omega, F)$.*
3. *$B(f, g)$ est de classe $\mathscr{C}^1(\Omega, F)$.*
4. *$f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1(\Omega, F)$.*

Proposition V.4

Soit $f : \Omega \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1],\Omega)$. Si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)).\gamma'(t)dt.$$

EXEMPLES :

Circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel :

$$\int_0^1 \left\langle -\nabla V(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle dt = -\int_0^1 dV(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = V(a) - V(b).$$

Proposition V.5

Si Ω est connexe par arcs, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa différentielle est nulle en tout point $\omega \in \Omega$.

Démonstration : Exigible que dans le cas où Ω est convexe. ■

§ 2. ***Applications de classe*** $\mathscr{C}^k$**.–** On commence par donner les définitions des dérivées partielles secondes.

Définition V.6

Dérivées partielles d'ordre k. Si $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$ existe en tout point de Ω et est dérivable par rapport à la variable x_{i_k}, on note sa dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}$, ou $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f$.

Définition V.7

Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent sur Ω et sont continues sur Ω.

Théorème V.8 (*de Schwarz*)

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, pour tout $q, p \in [\![1,n]\!]$, $\partial_{i_q}\partial_{i_p} f = \partial_{i_p}\partial_{i_q} f$.

Démonstration : Non exigible. ■

EXEMPLES :

Le Laplacien d'une fonction numérique f de classe $\mathscr{C}^2$ est défini par

$$\Delta f = \mathrm{div} \nabla f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

VI FIGURES IMPOSÉES

EXERCICES :

CCP 52

1. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Justifier l'existence et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (c) Justifier l'existence et donner la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   (d) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICES :

CCP 57

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de "f différentiable en $(0,0)$".
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICES :

CCP 58

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

   Donner la définition de "f différentiable en a".
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$ où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ /\ \forall\, (x,y) \in E \times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.